Билет №1

Андрианов Даниил гр.401

Вопрос 1. Выписать выражения для базисных функций $\varphi_i(x)$ для равномерной сетки Ω_h отрезка $[a, b]$. Обосновать представление кусочно-линейного восполнения $\tilde{u}(x)$ функции $u(x)$ на сетке Ω_h через базисные функции.

Вопрос 2. Построить итерационный метод Ньютона для решения разностной задачи.

$$-\left(2 + y_i^2\right) y_{\bar{x}x,i} = 2;\; i = 1, 2, \ldots, N-1;\; hN = l;\; y_0 = y_N = 0.$$

Билет 1.

1.

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \notin [x_0, x_1] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$$\tilde{u}(x) = L_1^{(i)}(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]; \; i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\tilde{u}(x) = u_{i-1} \frac{x_i - x}{h} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{h}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Рассмотрим отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. На этом отрезке

$\cancel{\tilde{u}(x) = u_{i-1}}$

$$\sum_{i=0}^{N} u_i \varphi_i(x) = u_{i-1} \cdot \frac{x_i - x}{h} + u_i \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h} =$$

$$= L_1^{(i)}(x)$$

В точках x_i такая функция равна u_i

В силу единственности такой кусочно-линейной функции, она равна $\tilde{u}(x)$

② $-(2+y_i^2)\,y_{\bar{x}x,i} = 2$; $i = 1, 2, \dots, N-1$;
$hN = l$; $y_0 = y_N = 0$.

Решение:

Пусть $y = y_i$, $f(y) = \dfrac{2}{2+y^2}$, $Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}$.

Тогда $f'(y) = -\dfrac{4y}{(2+y^2)^2}$,

$$Ay^{(n+1)} = f(y^{(n+1)}) \approx f(y^{(n)}) + f'(y^{(n)})(y^{(n+1)} - y^{(n)})$$

$$(y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)})\, f'_y(x_i, y_i^{(n)}) + y^{(n+1)}_{\bar{x}x,i} = -f(x_i, y_i^{(n)})$$

$$-\frac{y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)}}{(2+y_i^{(n)2})^2} \cdot 4y + y^{(n+1)}_{\bar{x}x,i} = -\frac{2}{2+y_i^{(n)2}};$$

$$y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0$$

ответ

Билет №2

Бучацкая Ольга гр.401

Вопрос 1. Пусть разностная сетка $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ связна, множества внутренних узлов ω_h и граничных узлов γ_h непустые, а условия положительности коэффициентов выполняются для всех $x \in \omega_h$. Доказать, что разностная краевая задача

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x),\ x \in \omega_h;\ y(x) = \mu(x),\ x \in \gamma_h;$$

имеет единственное решение.

Вопрос 2. Привести схему к каноническому виду, выяснить порядок аппроксимации и исследовать устойчивость по начальным данным.

$$h^2(y_i^{n+1} - y_i^{n-1}) = 2\tau(y_{i+1}^n + y_{i-1}^n - y_i^{n+1} - y_i^{n-1});$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;\ n = 1, 2, \ldots, K-1;\ \tau K = T;$$
$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0;\ y_i^0 = u_0(ih);\ y_i^1 = \bar{u}_0(ih).$$

Билет 2

1. ~~Введем~~

$$\mathcal{D}(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi). \quad Ly(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)\, y(\xi).$$

$\forall x \in \gamma_h : \mathcal{D}(x) = 1 > 0$, т. е.

$\exists\, x_0 \in \Omega_h : \mathcal{D}(x_0) > 0$, условия положительности коэф. выполнены $\forall x \in \omega_h$

Достаточно показать, что задача $Ly(x) = 0$, $x \in \Omega_h$ имеет только тривиальное решение. Для произвольного решения этой задачи

$$\begin{cases} Ly(x) \geq 0 \\ Ly(x) \leq 0 \end{cases} \forall x \in \Omega \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{монотонность} \\ \text{оператора } L \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x) \geq 0 \\ y(x) \leq 0 \end{cases} \forall x \in \Omega_h \Leftrightarrow y(x) \equiv 0 \text{ на } \Omega_h$$

(2) $$\frac{y_i^{n+1}-y_i^{n-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^n - \left(y_i^{n+1}+y_i^{n-1}\right) + y_{i-1}^n + 2y_i^n - 2y_i^n}{h^2}$$

$$y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} - \frac{\tau^2}{h^2}\cdot\frac{y_i^{n+1}-2y_i^n+y_i^{n-1}}{\tau^2}$$

$$y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{\tau^2}{h^2} y_{\bar{t}t} = y_{xx} \Rightarrow \psi = O\left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2}\right)$$

Канон. вид:

$$B y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + A y_n = 0.$$

$B = E$; $R = \frac{1}{h^2}E$; $Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}$; $i = 1, 2, \dots, N-1$;

$y_0 = y_N = 0.$

$B > 0$, $R > \frac{1}{4}A \Leftrightarrow \frac{1}{h^2}(y,y) > \frac{1}{4}(Ay,y)$

Отсюда следует абсолютная устойчивость.

Билет №3

Вострикова Ульяна гр.402

114-115

Вопрос 1. Доказать, что оптимальным итерационным параметром стационарного одношагового метода

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=f;\ n=0,1,\ldots;$$

при $A^T=A>0,\ B^T=B>0$ является значение

$$\tau=\frac{2}{\lambda_{\min}(B^{-1}A)+\lambda_{\max}(B^{-1}A)}.$$

Вопрос 2. На равномерной прямоугольной сетке в области $\overline{G}$ построить разностную схему четвертого порядка аппроксимации для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-x_1^2=x_2^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ (x_1,x_2)\in G=\{0<x_1<l_1,\ 0<x_2<l_2\}.$$

Найти условия монотонности схемы.

88(?)

Билет №4

Гаврилов Олег гр.401 193-194

Вопрос 1. Доказать, что для устойчивости двуслойной разностной схемы достаточно ее равномерной устойчивости по начальным данным.

Вопрос 2. Записать разностную задачу в матричной форме $Ay = f$ для $N = 6$.

175

$$y_{i-1j} + y_{i+1j} + y_{ij-1} + y_{ij+1} = 4y_{ij} - h^2;$$
$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0; \; i, j = 1, 2, \ldots, N; \; hN = 1.$$

Билет №5

Гаврилова Дарья гр.401

Вопрос 1. Исследовать устойчивость разностной схемы

235-236, 197, 76

$$\rho_i^n \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma (a y_{\bar{x}})_{x,i}^{n+1} + (1-\sigma)(a y_{\bar{x}})_{x,i}^n;$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1; \ hN = l; \ n = 0, 1, \ldots, K-1; \ K\tau = T;$$
$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}); \ y_i^0 = u_0(x_i);$$
$$\rho_i^n = \rho(x_i, t_n + \sigma\tau), \ a_i^n = 0.5(k(x_{i-1}, t_n) + k(x_i, t_n));$$

применяя принцип замороженных коэффициентов.

Вопрос 2. На неравномерной сетке отрезка $[0, 1]$ построить приближенное по МКЭ решение задачи

$$u''(x) = 1, \ 0 < x < 1; \ u(0) = 1, \ u(1) = 0.$$

45

Билет №6

4, 8

Долбнин Андрей гр.402

Вопрос 1. Дать определение кусочно-линейного восполнения $\tilde{u}(x)$ функции $u(x)$ на сетке Ω_h. В предположении, что $u(x) \in C^1[a,b]$, доказать неравенство

$$\int\limits_a^b (\tilde{u}(x) - u(x))^2 dx \leqslant h^2 \int\limits_a^b (\tilde{u}'(x) - u'(x))^2 dx, \text{ где } h = \max_{1 \le i \le N} h_i.$$

Вопрос 2. Для схемы переменных направлений задать граничные условия для $y^{n+1/2}$ и y^{n+1}, исключить $y^{n+1/2}$ и исследовать устойчивость полученной двуслойной схемы. Исходная область – прямоугольник со сторонами l_1 и l_2, сетка – равномерная прямоугольная с шагами h_1 и h_2, $u|_\gamma = \mu(x_1, x_2, t)$.

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} = y^{n+1/2}_{\bar{x}_2 x_2}, \quad \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} = y^{n+1}_{\bar{x}_1 x_1};$$

224

Билет №7

62-63

Зыкова Мария гр.402

Вопрос 1. Пусть разностная сетка $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ связна, множества внутренних узлов ω_h и граничных узлов γ_h непустые, а условия положительности коэффициентов выполняются для всех $x \in \omega_h$. Доказать, что для решений $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ разностных краевых задач

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \ x \in \omega_h; \ y(x) = \mu(x), \ x \in \gamma_h;$$

$$A(x)\bar{y}(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)\bar{y}(\xi) + \bar{F}(x), \ x \in \omega_h; \ \bar{y}(x) = \bar{\mu}(x), \ x \in \gamma_h;$$

справедлива оценка $|y(x)| \leq \bar{y}(x) \ \forall\, x \in \Omega_h$, если $|F(x)| \leq \bar{F}(x) \ \forall\, x \in \omega_h$, $|\mu(x)| \leq \bar{\mu}(x) \ \forall\, x \in \gamma_h$.

Вопрос 2. Построить разностную схему второго порядка аппроксимации и указать метод решения разностных уравнений для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + u^2, \ 0 < x < 1, \ t > 0;$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ u(x,0) = u_0(x).$$

236-238

Билет №8

171-172

Карпов Егор гр.403

Вопрос 1. Выписать итерационный метод Якоби для решения разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i; \; y_0 = y_N = 0; \; i = 1, 2, \ldots, N-1; \; hN = l.$$

Оценить скорость сходимости и необходимое число итераций для достижения заданной точности.

Вопрос 2. Методом гармоник найти необходимое условие устойчивости схемы

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = ih - \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h}.$$

72-73

Монотонна ли схема при этом условии?

Билет №9

189, 196, 70(!)

Кондратьев Алексей гр.402

Вопрос 1. Выписать разностную схему с весами, аппроксимирующую краевую задачу для уравнения теплопроводности, и получить достаточное условие устойчивости схемы.

Вопрос 2. На равномерной сетке отрезка $[0,1]$ построить приближенное в смысле МКЭ решение задачи

$$u''(x) = -2x^2,\ 0 < x < 1;\ u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

45

Билет №10

236, 250

Корнеева Александра гр.402

Вопрос 1. Выписать схему предиктор–корректор для численного решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1+u^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T;$$
$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(1,t) = \mu_2(t);\ u(x,0) = u_0(x).$$

Доказать второй порядок аппроксимации.

Вопрос 2. Построить итерационный метод Зейделя для разностной задачи и доказать его сходимость.

170, 119-120

$$y_{i-1j} + y_{i+1j} + y_{ij-1} + y_{ij+1} = 4y_{ij} - h^2;$$
$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0;\ i,j = 1,2,\ldots,N;\ hN = 1.$$

Билет №11

18, 19, 21

Кривоногов Роман гр.401

Вопрос 1. Дать определение приближенного решения $u_N(x)$ в смысле МКЭ задачи

$$u''(x) - u(x) = -x,\ 0 < x < 1;\ u(0) = u(1) = 0.$$

Доказать существование и единственность $u_N(x)$.

Вопрос 2. Доказать самосопряженность разностного оператора 167

$$Ay_i = -y_{\bar{x}x,i},\ i = 1, 2, \dots, N-1;\ hN = l;\ Ay_0 = -\frac{1}{h}y_{x,0},\ y_N = 0.$$

Лелюхин Денис гр.401 63

Вопрос 1. Пусть разностная сетка $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ связна, множества внутренних узлов ω_h и граничных узлов γ_h непустые, а условия положительности коэффициентов выполняются для всех $x \in \omega_h$. Доказать, что для решения разностной краевой задачи

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi),\ x \in \omega_h;\ y(x) = \mu(x),\ x \in \gamma_h;$$

справедлива оценка $\max\limits_{x \in \omega_h} |y(x)| \le \max\limits_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|$.

Вопрос 2. Для схемы переменных направлений найти погрешности аппроксимации каждого уравнения и выяснить порядок суммарной аппроксимации. Исходная область – прямоугольник со сторонами l_1 и l_2, сетка – равномерная прямоугольная с шагами h_1 и h_2.

224

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} = y^{n+1/2}_{\bar{x}_2 x_2},\ \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} = y^{n+1}_{\bar{x}_1 x_1};$$

Лефлер Иосиф гр.401 Билет 13 199

Вопрос 1. Выписать разностную схему с весами, аппроксимирующую краевую задачу для уравнения переноса, и получить достаточное условие устойчивости схемы.

Вопрос 2. Получить систему уравнений, которой удовлетворяют коэффициенты приближенного по МКЭ решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -(x_1 + 2x_2 + 3), & x = (x_1, x_2) \in G; \\ u(x) = 0, & x \in \partial G; \end{cases}$$

49-50

в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$.

Билет №14

251, 243-247

Лисовой Владимир гр.401

Вопрос 1. Выписать линеаризованное уравнение для погрешности нелинейной разностной схемы

$$y_{\bar{x}x,i} = -f(x_i, y_i); \; i = 1, 2, \ldots, N-1; \; Nh = l; \; y_0 = y_N = 0.$$

Доказать сходимость в непрерывной норме при соответствующих ограничениях на функцию $f(x, u)$ и гладкость точного решения $u(x)$.

Вопрос 2. Построить монотонную разностную схему для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x > 0, \; t > 0; \quad a = \text{const} < 0;$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \; u(0, t) = \mu(t).$$

76 (след. страница)

2) Построить монотонную разностную схему для задачи

$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $x>0$, $t>0$; $a = const < 0$;

$u(x,0)=u_0(x)$, $u(0,t)=\mu(t)$

~~Введем разност сетку~~

~~$x_{ij}=(t_i, x_j)$; $t_i = ih_1$; $x_j = jh_2$; $h_1N_1=l_1$, $h_2N_2=l_2$~~

~~$\omega_{\gamma} = \{x_{ij}, i=1,2,\dots,N_1-1$~~

~~$\omega_h = \{x_{ij}, i=1,2,\dots,N_1-1, j=1,2,\dots,N_2-1\}$~~

~~$\omega_{2h}=\{x_{0j}; j=1,2,\dots,N_2-1\}$~~

Переносим $t = x + const$, откуда $u(x,t)=u_0(x-t)$, $x>t$ и $u(x,t)=\mu(t-x)$, $x<t$

в $x\geq 0$, $t\geq 0$ введем разност сетку $\Omega_{h\tau}=\Omega_h \cup \omega_\tau$

$\Omega_h=\{x_i=ih;\ i=0,1,2,\dots\}$

$\omega_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,2,\dots\}$

разност. схема

~~$y_{t,i}^n + ay_{x,i}^n = 0$, $i=1,2,3,\dots$; $n=0,1,\dots$;~~

~~$y_i^0=u_0(x)$, $u(0,t)$~~ $u_0^n(t)=\mu(\cancel{t_n})$

~~В канонич. форме~~

~~$y_i^{n+1}=a\gamma y_{i-1}^n+(1-\gamma a)y_i^n$, $\gamma=\frac{\tau}{h}>0$~~

~~$a\gamma<0$~~

$1-\gamma a>0$

$y_{t,i}^n + a y_{x,i}^n=0$

$$y_i^{n+1}=(1+a\gamma)y_i^n - \gamma a y_{i+1}^n$$

$1+a\gamma>0$

$1+a\cdot\frac{\tau}{h}>0$ $\qquad$ $-\gamma a>0$, т.к $a<0$, $\gamma>0$.

$1>-a\frac{\tau}{h}$

$-a<\frac{h}{\tau}$

Локшин Никита гр.401

Вопрос 1. Для краевой задачи

17-18, 22

$$u''(x) - u(x) = -x,\ 0 < x < 1;\ u(0) = u(1) = 0$$

дать определения приближенного решения в смысле МКЭ путем постановки вариационной задачи и задачи минимизации. Доказать, что определения эквивалентны.

Вопрос 2. Методом гармоник исследовать устойчивость схемы

$$3y^n_{t,i} = 2y^n_{\bar{x}x,i} + y^{n+1}_{\bar{x}x,i};\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;$$
$$y^{n+1}_0 = y^{n+1}_N = 0,\ y^0_i = u_0(ih).$$

73

Билет №17

Никандрова Александра гр.402 131-132

Вопрос 1. Доказать, что многочлен $P_n(x)$, определяемый рекуррентным соотношением

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x),\ P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,$$

при $|x| \leq 1$ может быть записан в виде $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Вопрос 2. Найти достаточное условие устойчивости разностной схемы

$$\rho_i^n \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = (a_i^n y_{\bar{x}}^n)_{x,i};\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;$$
$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0;\ y_i^0 = u_0(ih);\ 1 \leqslant a_i^n \leqslant 2, \rho_i^n \geqslant 3.$$

74

Павлишин Кирилл гр.403 203

Вопрос 1. Выписать разностную схему с весами, аппроксимирующую краевую задачу для уравнения колебаний, и получить достаточные условия устойчивости схемы.

Вопрос 2. Для $N = 3$ доказать операторные неравенства $18E \leq A \leq 72E$, где E – единичный оператор,

$$Ay_{ij} = (4y_{ij} - y_{i-1j} - y_{i+1j} - y_{ij-1} - y_{ij+1})/h^2,\ y_{ij}|_{\gamma_h} = 0;$$
$$i, j = 1, 2, \dots, N-1;\ Nh = 1.$$

Билет 19

Вопрос 1. Выписать линеаризованное уравнение для погрешности нелинейной разностной схемы

251, 243-247

$$y_{\bar{x}x,i} = -f(x_i, y_i);\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ Nh = l;\ y_0 = y_N = 0.$$

Доказать сходимость в среднеквадратичной норме при соответствующих ограничениях на функцию $f(x, u)$ и гладкость точного решения $u(x)$.

Вопрос 2. Построить кусочно-линейное восполнение $\tilde{u}(x)$ функции $u(x) = x^2 - x$ на равномерной сетке отрезка $[0, 1]$. Оценить среднеквадратичные отклонения $\left(\int\limits_0^1 (\tilde{u} - u)^2 dx\right)^{1/2}$, $\left(\int\limits_0^1 (\tilde{u}' - u')^2 dx\right)^{1/2}$.

43

24

Сабирьянов Артур гр.403

Вопрос 1. Пусть $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ – обобщенное решение краевой задачи

$$u''(x) - u(x) = -x,\ 0 < x < 1;\ u(0) = u(1) = 0;$$

а $u_N(x) \in H_N$ – ее приближенное решение в смысле МКЭ. Доказать, что

$$||u_N - u||_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)} \leqslant ||v - u||_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)}\ \forall\, v \in H_N.$$

Вопрос 2. Построить итерационный метод Ньютона для отыскания корня системы уравнений

$$f_1(x_1, x_2) = c_1,\ f_2(x_1, x_2) = c_2,\ c_1, c_2 = \mathrm{const}.$$

253

Билет №21

72

Салахутдинов Кирилл гр.402

Вопрос 1. Исследовать монотонность разностной схемы

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2}\left(y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + y_{\bar{x}x,i}^n\right); \; y_i^n = y(x_i, t_n);$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1; \; n = 0, 1, \ldots, K-1; \; Nh = l, \; K\tau = T;$$
$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \; y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}); \; y_i^0 = u_0(x_i);$$

а также ее устойчивость методом гармоник. 46

Вопрос 2. На неравномерной сетке отрезка $[0, 1]$ построить приближенное в смысле МКЭ решение задачи

$$u''(x) - u(x) = 1, \; 0 < x < 1; \; u(0) = u(1) = 1.$$

Билет №22

126-136

Вопрос 1. Выписать попеременно–треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров для решения разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i;\ y_0 = y_N = 0;\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l.$$

Оценить необходимое число итераций для достижения заданной точности.

Вопрос 2. На равномерной прямоугольной сетке в области $\overline{G}$ построить разностную схему второго порядка аппроксимации для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ (x_1, x_2) \in G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}.$$

90

Исследовать монотонность схемы.

Билет №23

224

Симановский Николай гр.402

Вопрос 1. Указать метод решения уравнений разностной схемы

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{ij}^{n}}{0.5\tau} = y^{n}_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y^{n+1/2}_{\bar{x}_2 x_2, ij},$$
$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+1/2}}{0.5\tau} = y^{n+1}_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y^{n+1/2}_{\bar{x}_2 x_2, ij};\ x_{ij} \in \omega_h,\ t_n \in \omega_\tau;$$
$$y_{ij}^{n+1} = \mu(x_{ij}, t_{n+1}), x_{ij} \in \gamma_h,\ t_n \in \omega_\tau;$$
$$y_{ij}^{0} = u_0(x_{ij}),\ x_{ij} \in \Omega_h;$$

где $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ – прямоугольная равномерная разностная сетка в прямоугольнике $\overline{G} = G + \partial G$, ω_τ – равномерная сетка по времени. Оценить необходимое количество арифметических операций.

Вопрос 2. Построить попеременно–треугольный итерационный метод для решения разностной задачи

126

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i;\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;\ y_0 = y_N = 0.$$

Билет №24

Синяков Анатолий гр.403 251, 243

Вопрос 1. Построить итерационный метод Ньютона для решения нелинейной разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f(x_i, y_i);\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ Nh = l;\ y_0 = y_N = 0.$$

Выписать уравнения итерационного процесса для поправки на следующей итерации в индексной форме. Указать метод их решения.

Вопрос 2. Найти достаточное условие устойчивости разностной схемы, а также необходимое условие ее устойчивости методом гармоник.

$$\rho\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = y^n_{\bar{x}x,i};\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;$$
$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0;\ y_i^0 = u_0(ih);\ \rho = \mathrm{const} > 0.$$

Сравнить найденные условия.

72-76

Билет №25

72

Сульженко Родион гр.401

Вопрос 1. Исследовать монотонность разностной схемы

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = y_{\bar{x}x,i}^{n+1}; \; y_i^n = y(x_i, t_n);$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1; \; n = 0, 1, \ldots, K-1; \; Nh = l, \; K\tau = T;$$
$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \; y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}); \; y_i^0 = u_0(x_i);$$

а также ее устойчивость методом гармоник.

Вопрос 2. Построить итерационный метод Ньютона для отыскания корня системы уравнений

253

$$x_1 = f_1(x_1, x_2), \; x_2 = f_2(x_1, x_2).$$

Билет №26

Сыновьят Тимофей гр.401 142

Вопрос 1. Доказать, что при $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$ градиентный итерационный метод

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau_{n+1}} + Ay_n = f;\ n = 0, 1, \ldots;\ \tau_{n+1} = \frac{(v_n, r_n)}{(Av_n, v_n)};$$

где $r_n = Ay_n - f$, $v_n = B^{-1}r_n$, сходится не хуже стационарного метода с теми же матрицами A, B и оптимальным параметром.

Вопрос 2. Доказать линейную независимость базисных функций $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ для регулярной триангуляции (разбиения на одинаковые треугольники) прямоугольника $\overline{G}$.

41

Билет №27

Трофимов Денис гр.401 211

Вопрос 1. Свести разностную схему к двуслойной:

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{ij}^{n}}{0.5\tau} = y_{\bar{x}_1 x_1,ij}^{n} + y_{\bar{x}_2 x_2,ij}^{n+1/2},$$
$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+1/2}}{0.5\tau} = y_{\bar{x}_1 x_1,ij}^{n+1} + y_{\bar{x}_2 x_2,ij}^{n+1/2}; \ x_{ij} \in \omega_h, \ t_n \in \omega_\tau;$$
$$y_{ij}^{n+1} = \mu(x_{ij}, t_{n+1}), x_{ij} \in \gamma_h, \ t_n \in \omega_\tau;$$
$$y_{ij}^{0} = u_0(x_{ij}), \ x_{ij} \in \Omega_h;$$

где $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ – прямоугольная равномерная разностная сетка в прямоугольнике $\overline{G} = G + \partial G$, ω_τ – равномерная сетка по времени. Исследовать аппроксимацию и устойчивость схемы.

Вопрос 2. Какое уравнение и с какой погрешностью аппроксимирует разностная схема

$$4y_{\overset{\circ}{t},i}^{n} = y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + 2y_{\bar{x}x,i}^{n} + y_{\bar{x}x,i}^{n-1}.$$

Является ли схема монотонной? 88

Билет №28

251, 243

Вопрос 1. Построить итерационный метод Ньютона для решения нелинейной разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f(x_i, y_i);\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ Nh = l;\ y_0 = y_N = 0.$$

Доказать сходимость итерационного процесса при соответствующих ограничениях на функцию $f(x, u)$ и выбор начального приближения.

Вопрос 2. На равномерной сетке с шагом h построить разностную схему второго порядка аппроксимации для задачи

171

$$u''(x) = -f(x),\ 0 < x < 1,\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0.$$

Выписать итерационный метод Зейделя для нахождения решения.

[redacted]

Билет №29

32

Вопрос 1. Дать определение базисных функций $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ для регулярной триангуляции (разбиения на одинаковые треугольники) прямоугольника $\overline{G}$. Выписать и обосновать выражения для функций $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, отличных от нуля в треугольнике $G_{ij}^{(3)}$.

Вопрос 2. Построить итерационный метод Якоби для решения разностной задачи и исследовать его сходимость.

169

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i;\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;\ y_{x,0} = 0,\ y_N = 0.$$

Билет №31

[redacted] 144

Вопрос 1. Построить итерационный метод скорейшего спуска для решения системы линейных алгебраических уравнений $Ay = f$, где $A^T = A > 0$, путем локальной минимизации функционала $J(x) = (Ax, x) - 2(f, x)$.

Вопрос 2. Построить итерационный метод Ньютона для отыскания $\sqrt[4]{a}$, $a > 0$.

-

Билет №30

[redacted]

77-78

Вопрос 1. Найти порядок погрешности аппроксимации по шагам равномерной разностной сетки h и τ разностной схемы

$$y^n_{t,i} + y^n_{\overset{\circ}{x},i} = h\nu y^n_{\bar{x}x,i},\ \nu = \text{const} > 0; \quad i = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$y^0_i = u_0(x_i),\ y^n_0 = \mu(t_n).$$

Какую дифференциальную задачу аппроксимирует схема? Найти условие монотонности схемы.

Вопрос 2. Привести схему к каноническому виду, выяснить порядок аппроксимации и исследовать устойчивость по начальным данным.

$$2(h^2 y^{n+1}_i + 2\tau y^n_i) = (h^2 + 2\tau)(y^n_{i+1} + y^n_{i-1});$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;\ n = 0, 1, \ldots, K-1;\ \tau K = T;$$
$$y^{n+1}_0 = y^{n+1}_N = 0;\ y^0_i = u_0(ih).$$

218

Билет №1

229

Алехина Юлия гр.404

Вопрос 1. Построить автомодельное решение уравнения $u\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ типа бегущей волны.

Вопрос 2. Найти условие монотонности разностной схемы

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (ay_{\bar{x}})_{x,i}^n,\ 1 \leqslant a_i^n \leqslant 2;\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;$$
$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0,\ y_i^0 = u_0(ih).$$

74

С помощью принципа максимума показать, что при выполнении полученного условия схема устойчива по начальным данным.

36-38

Ахметова Алина гр.405

Вопрос 1. Пусть $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ – базисные функции для регулярной триангуляции (разбиения на одинаковые треугольники) прямоугольника $\overline{G}$, H_N – линейная оболочка базисных функций. Выписать и обосновать выражение для произвольной функции $v \in H_N$ в треугольнике $G_{ij}^{(5)}$.

Вопрос 2. Построить монотонную разностную схему второго порядка аппроксимации для задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(l_1, x_2) = 0,\ 0 < x_2 < l_2;$$
$$u(x_1, x_2) = 0,\ (x_1, x_2) \in \partial G \backslash \{x_1 = l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}.$$

91

Билет №4

165+-

Василенко Анна гр.404

Вопрос 1. Доказать устойчивость метода матричной прогонки для решения разностной задачи

$$\frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h^2} + \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h^2} = -f_{ij};$$
$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0;\ i,j = 1,2,\ldots,N-1;\ Nh = 1.$$

Оценить необходимое количество арифметических операций для реализации метода.

Вопрос 2. Исследовать устойчивость схемы, выяснить порядок погрешности аппроксимации и указать метод решения.

$$2y^n_{t,i} = y^{n+1}_{\bar{x}x,i} + y^n_{\bar{x}x,i};\ i = 1,2,\ldots,N-1;\ hN = l;$$
$$y^{n+1}_0 = y^{n+1}_N = 0,\ y^0_i = u_0(ih).$$

221

Билет №5

Вертелецкий Никита гр.407

СЛЕД. СТРАНИЦЫ

Вопрос 1. Записать разностную схему

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i; \; i = 0, 1, \ldots, N; hN = l; \; y_0 = \mu_1, \; y_N = \mu_2;$$

в виде операторного уравнения и доказать ее корректность.

Вопрос 2. Построить автомодельное решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^4 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ типа бегущей волны. Исследовать непрерывность второй производной решения.

1. $y_{\bar{x}x,i} = -f_i$, $i = \overline{0,N}$; $hN = l$; $y_0 = \mu_1$, $y_N = \mu_2$

опер. уравн. и док. корректность

2. автомодельное решение ур-я $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^4 \frac{\partial u}{\partial x}\right)$

типа бегущей волны.

~~Ку~~ 1. Рассмотрим разностную схему

$y_{\bar{x}x,i} = -f_i$, $i = \overline{0,N}$

~~Вв~~ Введем пр-во $H_{N+1} = \{y(x_i),\ x_i \in \omega_h\}$ сеточных ф-ий определенных во внутренних узлах сетки.

$(A^{(1)}y)_0 = \frac{2y_0 - y_1}{h^2} = \frac{2\mu_1}{h^2} + f_1 = \varphi_1$

$(A^{(1)}y)_i = -y_{\bar{x}x,i} = f_i = \varphi_i$,

$(A^{(1)}y)_N = \frac{2y_N - y_{N-1}}{h^2} = f_{N-1} + \frac{2\mu_2}{h^2} = \varphi_N$

Данные рав-ва задают лин. оператор $A^{(1)}: H_{N+1} \to H_{N+1}$ и вектор $\varphi \in H_{N+1}$

Схема записана в виде ~~Ay_0~~ $\cancel{(A^{(1)}y)_i = -y_{\bar{x}x,i}}$

$A^{(1)}y = \varphi$; $y, \varphi \in H_{N+1}$

Корректность:

Пусть заданы нормы $\|\cdot\|_{(1N+1)}$ и $\|\cdot\|_{(2N+1)}$ и скалярное произведение $(y, v)_{N+1}$, $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$

1) Решение ур-я $\exists!$

2) $\exists M > 0: \|y\|_{(1N+1)} \leq M \|\varphi\|_{(2N+1)}$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^4 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ $\qquad k(u) = u^4$

$u(x,t) = u(\xi)$, $\xi = Dt - x$, D − постоянная

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = Du'$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = -u'$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = (ku')'$

$Du' = (ku')' \iff Du = k(u)u' + C_1$ (пусть $C_1 = 0$)

$Du = u^4 u' \iff d\xi = \dfrac{1}{D}u^3 du \iff \xi = \dfrac{1}{4D}u^4 + C_2$ $(C_2 = 0)$

При $\xi \geq 0$ определено решение

$u(\xi) = (4D)^{\frac{1}{4}}\xi^{\frac{1}{4}}$, $\xi \geq 0$

При $\xi < 0$ доопределим $u(\xi)$ $u(0) = 0$

$u(\xi) = u(0) = 0$, $\xi < 0$

$$u(x,t) = \begin{cases} (4D)^{\frac{1}{4}}(Dt - x)^{\frac{1}{4}}, & x \leq Dt \\ 0, & x > Dt \end{cases}$$

Билет №6

Гласов Станислав гр.407 -

Вопрос 1. Найти решение краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right), \ x > 0, \ t > 0;$$
$$u(0,t) = \sqrt{t}, \ u(\infty, t) = 0, \ t \geq 0;$$
$$u(x,0) = 0, \ x > 0.$$

Является ли найденное решение классическим? Ответ обосновать.

Вопрос 2. На неравномерной сетке отрезка $[0,1]$ построить приближенное по МКЭ решение задачи

15

$$((2+x^2)u'(x))' = 1, \ 0 < x < 1; \ u(0) = 0, \ u(1) = 0.$$

Билет №7

17-18. 22

Гончаров Максим гр.405

Вопрос 1. Дать определения приближенного решения в смысле МКЭ задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике путем постановки вариационной задачи и задачи минимизации. Доказать, что определения эквивалентны.

Вопрос 2. Построить автомодельное решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[4]{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ типа бегущей волны. Исследовать непрерывность второй производной решения.

см. билет 5

80(?)

Горбунова Ольга гр.405

Вопрос 1. Найти погрешность аппроксимации разностной схемы

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (1 - 0.5h|r(x_i)|)y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + r_+(x_i)y_{x,i}^{n+1} + r_-(x_i)y_{\bar{x},i}^{n+1},$$
$$r(x_i) = 0.5 - x_i;$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1;\ n = 0, 1, \ldots, K-1;\ Nh = l,\ K\tau = T;$$
$$y_0^{n+1} = 0,\ y_N^{n+1} = 0;\ y_i^0 = u_0(x_i);$$
$$r_+(x_i) = 0.5(r(x_i) + |r(x_i)|),\ r_-(x_i) = 0.5(r(x_i) - |r(x_i)|).$$

Исследовать монотонность схемы.

Вопрос 2. Пусть $\{\varphi_{ij}\}$ – конечно-элементный базис, введенных при решении методом конечных элементов задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике G. Выписать выражения для базисных функций $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, отличных от нуля в треугольнике $G_{ij}^{(4)}$.

47

Кичуков Сергей гр.405

180

Вопрос 1. Записать разностную схему

$$(y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij} = -f_{ij}, \ x_{ij} \in \omega_h; \ y\big|_{\gamma_h} = 0;$$

в виде операторного уравнения и доказать ее корректность, где $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ – прямоугольная равномерная разностная сетка в прямоугольнике $\overline{G} = G + \partial G$.

Вопрос 2. На равномерной сетке с шагом h построить разностную схему второго порядка аппроксимации для задачи

$$u^{''}(x) = -f(x), \ 0 < x < 1, \ u'(0) = 0, \ u(1) = 0.$$

Выписать итерационный метод Якоби для нахождения решения.

169

Билет №11

Кодзоев Магамед гр.407

Вопрос 1. Выписать погрешность аппроксимации и определить с каким порядком по шагам h и τ равномерной сетки разностная схема

$$\rho_i^{n+1/2}\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{1}{2}\left((ay_{\bar{x}})_{x,i}^{n+1}+(ay_{\bar{x}})_{x,i}^{n}\right);$$ 233

$$\rho_i^{n+1/2}=\rho(x_i,t_n+0.5\tau),\ a_i^n=0.5(k(x_{i-1},t_n)+k(x_i,t_n));$$

аппроксимирует уравнение $\rho(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$.

Вопрос 2. Исследовать устойчивость схемы

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^{n-1}}{2\tau}=\frac{y_{i+1}^n-(y_i^{n+1}+y_i^{n-1})+y_{i-1}^n}{h^2};$$

$$i=1,2,\ldots,N-1;\ hN=l;\ n=0,1,\ldots,K-1;\ \tau K=T;$$ 205

$$y_i^0=u_0(ih),\ y_i^1=\tilde{u}_0(ih);\ y_0^n=y_N^n=0.$$

Билет №13

56

Кондратенко Иван гр.404

Вопрос 1. Сформулировать отрицание определения связности разностной сетки. Остается ли утверждение принципа максимума для разностных схем верным при отсутствии условия связности сетки и сохранении прочих условий? Ответ обосновать.

Вопрос 2. Построить чисто неявную нелинейную разностную схему и указать метод решения разностных уравнений для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1+u^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u, \ 0 < x < 1, \ t > 0;$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ u(x,0) = u_0(x).$$

237

Билет №14

Кот Владислав гр.407 111

Вопрос 1. Выписать уравнение для погрешности z_n стационарного одношагового итерационного метода

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=f;\ n=0,1,\ldots.$$

Доказать, что при $A^T=A>0$, $B^T=B>0$ эквивалентны неравенства

$$\|z_{n+1}\|_A\le\rho\|z_n\|_A,\ \|z_{n+1}\|_B\le\rho\|z_n\|_B;\quad n=0,1,\ldots;\ \rho>0.$$

Вопрос 2. Пусть $\{\varphi_{ij}\}$ – конечно-элементный базис, введенных при решении методом конечных элементов задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике G. Вычислить интеграл

$$\int\limits_G(ax_1+bx_2)\varphi_{ij}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2;\ a,b=\mathrm{const}.$$

49

Билет №15

Кривошеин Григорий гр.407 167

Вопрос 1. Пусть $H_N = \{y(x_i); i = 1, 2, \ldots, N; Nh = l\}$, $(y, v)_{H_N} = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h$.

Найти оператор, сопряженный оператору $A : H_N \to H_N$, где

$$(Ay)_i = -y_{x,i};\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ (Ay)_N = \frac{y_N}{h}.$$

Доказать положительную определенность оператора A.

Вопрос 2. Исследовать монотонность разностной схемы

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{2h},$$

а также ее устойчивость методом гармоник.

72

Билет №16

Куркин Максим гр.409 233

Вопрос 1. Выписать погрешность аппроксимации и определить с каким порядком по шагам h и τ равномерной сетки разностная схема

$$\rho_i^{n+1}\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=(ay_{\bar{x}})_{x,i}^{n+1};$$
$$\rho_i^n=\rho(x_i,t_n),\ a_i^n=0.5(k(x_{i-1},t_n)+k(x_i,t_n));$$

аппроксимирует уравнение $\rho(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right).$ 140

Вопрос 2. В градиентном итерационном методе

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau_{n+1}}+Ay_n=f;\ n=0,1,\ldots;\ \tau_{n+1}=\frac{(Dv_n,z_n)}{(Dv_n,v_n)}$$

выбрать $D=A^TB^{-1}A$. Выписать условия применимости метода, окончательную формулу для вычисления итерационных параметров и минимизируемую норму.

Билет №20

Мик Дмитрий гр.407 193-194

Вопрос 1. Доказать, что для устойчивости двуслойной разностной схемы достаточно ее равномерной устойчивости по начальным данным.

Вопрос 2. Записать разностную задачу в матричной форме $Ay = f$ для $N = 6$.

$$y_{i-1j} + y_{i+1j} + y_{ij-1} + y_{ij+1} = 4y_{ij} - h^2;$$
$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0; \; i, j = 1, 2, \ldots, N; \; hN = 1.$$

175

Мысова Ксения гр.404

Вопрос 1. Исследовать устойчивость разностной схемы 235-236, 74-76

$$\rho_i^n \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma(a y_{\bar{x}})_{x,i}^{n+1} + (1-\sigma)(a y_{\bar{x}})_{x,i}^n;$$
$$i = 1, 2, \dots, N-1;\; hN = l;\; n = 0, 1, \dots, K-1;\; K\tau = T;$$
$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}),\; y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1});\; y_i^0 = u_0(x_i);$$
$$\rho_i^n = \rho(x_i, t_n + \sigma\tau),\; a_i^n = 0.5(k(x_{i-1}, t_n) + k(x_i, t_n));$$

применяя принцип замороженных коэффициентов.

Вопрос 2. На неравномерной сетке отрезка $[0, 1]$ построить приближенное по МКЭ решение задачи

$$u''(x) = 1,\; 0 < x < 1;\; u(0) = 1,\; u(1) = 0.$$ 45

Билет №24

Пузанов Константин гр.404 171

Вопрос 1. Выписать итерационный метод Якоби для решения разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i;\ y_0 = y_N = 0;\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l.$$

Оценить скорость сходимости и необходимое число итераций для достижения заданной точности.

Вопрос 2. Методом гармоник найти необходимое условие устойчивости схемы

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = ih - \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h}.$$ 72

Монотонна ли схема при этом условии?

236-238

Сапрыкин Алексей гр.404

Вопрос 1. Выписать схему предиктор–корректор для численного решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1+u^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T;$$
$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(1,t) = \mu_2(t);\ u(x,0) = u_0(x).$$

Доказать второй порядок аппроксимации.

Вопрос 2. Построить итерационный метод Зейделя для разностной задачи и доказать его сходимость.

$$y_{i-1j} + y_{i+1j} + y_{ij-1} + y_{ij+1} = 4y_{ij} - h^2;$$
$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0;\ i,j = 1,2,\dots,N;\ hN = 1.$$ 170

Билет №27

17-21

Свирский Фёдор гр.405

Вопрос 1. Дать определение приближенного решения $u_N(x)$ в смысле МКЭ задачи

$$u''(x) - u(x) = -x, \; 0 < x < 1; \; u(0) = u(1) = 0.$$

Доказать существование и единственность $u_N(x)$.

Вопрос 2. Доказать самосопряженность разностного оператора

$$Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}, \; i = 1, 2, \ldots, N-1; \; hN = l; \; Ay_0 = -\frac{1}{h}y_{x,0}, \; y_N = 0.$$

167

Сиващенко Павел гр.404 63

Вопрос 1. Пусть разностная сетка $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ связна, множества внутренних узлов ω_h и граничных узлов γ_h непустые, а условия положительности коэффициентов выполняются для всех $x \in \omega_h$. Доказать, что для решения разностной краевой задачи

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi), \ x \in \omega_h; \ y(x) = \mu(x), \ x \in \gamma_h;$$

справедлива оценка $\max\limits_{x \in \omega_h} |y(x)| \le \max\limits_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|$.

Вопрос 2. Для схемы переменных направлений найти погрешности аппроксимации каждого уравнения и выяснить порядок суммарной аппроксимации. Исходная область – прямоугольник со сторонами l_1 и l_2, сетка – равномерная прямоугольная с шагами h_1 и h_2.

224

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} = y^{n+1/2}_{\bar{x}_2 x_2}, \ \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} = y^{n+1}_{\bar{x}_1 x_1};$$

Таймасханов Сеfeражудин гр.405 199

Вопрос 1. Выписать разностную схему с весами, аппроксимирующую краевую задачу для уравнения переноса, и получить достаточное условие устойчивости схемы.

Вопрос 2. Получить систему уравнений, которой удовлетворяют коэффициенты приближенного по МКЭ решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -(x_1 + 2x_2 + 3), & x = (x_1, x_2) \in G; \\ u(x) = 0, & x \in \partial G; \end{cases}$$

в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$. 49-50

Билет №30

Шнейдер Ярослав гр.407

239, 251

Вопрос 1. Выписать линеаризованное уравнение для погрешности нелинейной разностной схемы

$$y_{\bar{x}x,i} = -f(x_i, y_i);\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ Nh = l;\ y_0 = y_N = 0.$$

Доказать сходимость в непрерывной норме при соответствующих ограничениях на функцию $f(x, u)$ и гладкость точного решения $u(x)$.

Вопрос 2. Построить монотонную разностную схему для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x > 0,\ t > 0; \quad a = \mathrm{const} < 0;$$
$$u(x, 0) = u_0(x),\ u(0, t) = \mu(t).$$

билет 14 из первого дня

Билет №1

Атанесян Лилит гр.405

Вопрос 1. Выписать выражения для базисных функций $\varphi_i(x)$ для равномерной сетки Ω_h отрезка $[a, b]$. Обосновать представление кусочно-линейного восполнения $\tilde{u}(x)$ функции $u(x)$ на сетке Ω_h через базисные функции.

Вопрос 2. Построить итерационный метод Ньютона для решения разностной задачи.

$$(1 + y_i)y_{\bar{x}x,i} + 1 = 0;\ i = 1, 2, \ldots, N - 1;\ hN = l;\ y_0 = y_N = 0.$$

Билет №2

Бондарев Иван гр.407

Вопрос 1. Пусть разностная сетка $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ связна, множества внутренних узлов ω_h и граничных узлов γ_h непустые, а условия положительности коэффициентов выполняются для всех $x \in \omega_h$. Доказать, что разностная краевая задача

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x),\ x \in \omega_h;\ y(x) = \mu(x),\ x \in \gamma_h;$$

имеет единственное решение.

Вопрос 2. Привести схему к каноническому виду, выяснить порядок аппроксимации и исследовать устойчивость по начальным данным.

$$(1+2\gamma)y_i^{n+1} = (1-2\gamma)y_i^{n-1} + 2\gamma(y_{i+1}^n + y_{i-1}^n),\ \gamma = \tau/h^2;$$
$$i = 1,2,\ldots,N-1;\ hN = l;\ n = 1,2,\ldots,K-1;\ \tau K = T;$$
$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0;\ y_i^0 = u_0(ih);\ y_i^1 = \bar{u}_0(ih).$$

Билет №11

Лысенко Илья гр.407

Вопрос 1. Дать определение приближенного решения $u_N(x)$ в смысле МКЭ задачи

$$u''(x) - u(x) = -x, \ 0 < x < 1; \ u(0) = u(1) = 0.$$

Доказать существование и единственность $u_N(x)$.

Вопрос 2. Доказать самосопряженность разностного оператора

$$Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}, \ i = 1, 2, \ldots, N-1; \ hN = l; \ Ay_0 = -\frac{1}{h}y_{x,0}, \ y_N = 0.$$

Билет №12

Мисютин Данила гр.409

Вопрос 1. Пусть разностная сетка $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ связна, множества внутренних узлов ω_h и граничных узлов γ_h непустые, а условия положительности коэффициентов выполняются для всех $x \in \omega_h$. Доказать, что для решения разностной краевой задачи

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi),\ x \in \omega_h;\ y(x) = \mu(x),\ x \in \gamma_h;$$

справедлива оценка $\max\limits_{x \in \omega_h} |y(x)| \leq \max\limits_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|$.

Вопрос 2. Для схемы переменных направлений найти погрешности аппроксимации каждого уравнения и выяснить порядок суммарной аппроксимации. Исходная область – прямоугольник со сторонами l_1 и l_2, сетка – равномерная прямоугольная с шагами h_1 и h_2.

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2},\ \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 y^{n+1};\ \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},\ \alpha = 1,\ 2.$$

Билет №13

Никандрова Александра гр.402

Вопрос 1. Выписать разностную схему с весами, аппроксимирующую краевую задачу для уравнения переноса, и получить достаточное условие устойчивости схемы.

Вопрос 2. Получить систему уравнений, которой удовлетворяют коэффициенты приближенного по МКЭ решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -(x_1 + 2x_2 + 3), & x = (x_1, x_2) \in G; \\ u(x) = 0, & x \in \partial G; \end{cases}$$

в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$.

Билет №17

Черногорцев Иван гр.407

Вопрос 1. Доказать, что многочлен $P_n(x)$, определяемый рекуррентным соотношением

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x),\ P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,$$

при $|x| \leq 1$ может быть записан в виде $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Вопрос 2. Найти достаточное условие устойчивости двуслойной разностной схемы

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = (a_i^n y_{\bar{x}}^n)_{x,i};\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l;$$
$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0;\ 0 < a_* \leqslant a_i^n \leqslant a^*.$$

Билет №13

Иванов Иван Иванович

Вопрос 1. Выписать попеременно–треугольный итерационный метод для решения разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i;\ y_0 = y_N = 0;\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ hN = l.$$

Оценить скорость сходимости и необходимое число итераций для достижения заданной точности.

Вопрос 2. Аппроксимировать уравнение со вторым порядком.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1 + x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \cos t.$$

Билет №26

Петров Петр Петрович

Вопрос 1. Пусть $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ – обобщенное решение краевой задачи

$$u''(x) - u(x) = -x, \; 0 < x < 1; \; u(0) = u(1) = 0;$$

а $u_N(x)$ – ее приближенное решение в смысле МКЭ. Доказать, что

$$||u_N - u||_C \leqslant ||u_N - u||_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)}.$$

Вопрос 2. Привести схему к каноническому виду, выяснить порядок аппроксимации и найти достаточное условие устойчивости по начальным данным.

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = y^n_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y^{n+1}_{\bar{x}_2 x_2, ij}, \; y_{ij}|_{\gamma_h} = 0;$$
$$i = 1, 2, \ldots, N_1 - 1; \; j = 1, 2, \ldots, N_2 - 1; \; h_1 N_1 = l_1, \; h_2 N_2 = l_2.$$